Université Mohammed V
Faculté des Sciences
Département de Mathématiques

ALGÈBRE 2

SMPC - S2

2014 - 2015

A. EL Abdllaoui, A. Hajji, M. EL Kadiri et M. Ziani

FACULTÉ DES SCIENCES – RABAT

www.fsr.ac.ma

Année universitaire : 2014 - 2015


Table des matières



1. Espaces vectoriels

Dans tout ce chapitre, $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

1.1 Structure d'espace vectoriel

Définition 1.1.1 Soit E un ensemble.

– Une **loi de composition interne '+'** dans E est une application de $E \times E$ dans E :

$$(u,v) \in E \times E \mapsto u+v \in E.$$

– Une **loi de composition externe '.'** sur E est une application de $\mathbb{K} \times E$ dans E :

$$(\alpha,u) \in \mathbb{K} \times E \mapsto \alpha.u \in E.$$

Exemples

1. Dans $E = \{0,1\}$ l'application définie par

$$aTb = 1 - ab$$

est une loi de composition interne de E.

2. Soit $E = \mathbb{R}^3$. L'application notée '.' de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^3$ définie par

$$\alpha.(x,y,z) = (\alpha x, \alpha y, \alpha z)$$

est une loi de composition externe.

Définition 1.1.2 On appelle **espace vectoriel** sur $\mathbb{K}$, ou $\mathbb{K}$-espace vectoriel, un ensemble non vide E muni d'une loi (de composition interne) notée $'+'$ et d'une autre loi (de composition externe) notée $'.'$ telles que

1. La loi $+$ est associative : $\forall u,v,w \in E,\ (u+v)+w = u+(v+w)$
2. E possède un élément neutre 0_E pour $+$: $\forall u \in E,\ u+0_E = 0_E+u = u$
3. Tout élément de E admet un symétrique : $\forall u \in E, \exists v \in E,\ u+v = v+u = 0_E$
4. La loi $+$ est commutative : $\forall u,v \in E,\ u+v = v+u$
5. $\forall \alpha,\beta \in \mathbb{K}, \forall u \in E,\ \alpha.(\beta.u) = (\alpha\beta).u$
6. $\forall \alpha,\beta \in \mathbb{K}, \forall u \in E,\ (\alpha+\beta).u = \alpha.u+\beta.u$
7. $\forall \alpha \in \mathbb{K}, \forall u,v \in E,\ \alpha.(u+v) = \alpha.u+\alpha.v$

8. $\forall u \in E,\ 1.u = u$

Le $\mathbb{K}$-espace vectoriel E muni des deux lois $'+'$ et $'.'$ sera noté $(E,+,.)$. Les éléments de $\mathbb{K}$ sont appelés scalaires et ceux de E sont appelés vecteurs. Le symétrique v d'un élément u de E pour $+$ est noté $-u$.

Exemples

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, l'ensemble $\mathbb{K}^n$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel pour les lois

$$\begin{aligned}(x_1,\dots,x_n)+(y_1,\dots,y_n) &= (x_1+y_1,\dots,x_n+y_n)\\ \lambda.(x_1,\dots,x_n) &= (\lambda x_1,\dots,\lambda x_n).\end{aligned}$$

2. Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et A un ensemble quelconque non vide. L'ensemble E^A des applications de A dans E est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel pour les lois

$$f+g:\ \begin{array}{rcl} A & \to & E \\ x & \mapsto & (f+g)(x)=f(x)+g(x)\end{array}$$

et

$$\lambda.f:\ \begin{array}{rcl} A & \to & E \\ x & \mapsto & (\lambda.f)(x)=\lambda.f(x).\end{array}$$

Par exemple, $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ l'ensemble des suites réelles est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel pour les lois usuelles.

3. L'ensemble $\mathbb{R}_n[X]$ des polynômes de degré inférieur ou égal à $n \in \mathbb{N}$ (à coefficients réels) est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel pour les lois

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n} a_k X^k + \sum_{k=0}^{n} b_k X^k &= \sum_{k=0}^{n}(a_k+b_k)X^k\\ \lambda.\sum_{k=0}^{n} a_k X^k &= \sum_{k=0}^{n}(\lambda a_k)X^k,\ \ \lambda\in\mathbb{K}.\end{aligned}$$

Proposition 1.1.1 Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Alors $\forall(\alpha,\beta)\in\mathbb{K}^2$, $\forall(u,v)\in E^2$, on a

1. $\alpha.u = 0_E \Leftrightarrow (\alpha = 0$ ou $u = 0_E)$
2. $(\alpha-\beta).u = \alpha.u - \beta.u$
3. $\alpha.(u-v) = \alpha.u - \alpha.v$.

Démonstration. Ces propriétés se déduisent facilement de la définition d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Donnons, par exemple, la preuve de la propriété 1.
Supposons $\lambda.u = 0_E$ et $\lambda \neq 0$. Il existe un scalaire λ^{-1} de $\mathbb{K}$ tel que $\lambda^{-1}\lambda = 1$, d'où

$$u = 1.u = (\lambda^{-1}\lambda).u = \lambda^{-1}.(\lambda.u) = \lambda^{-1}.0_E = 0_E.$$

■

Exercice 1.1.
Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Montrer que $\forall\alpha\in\mathbb{K}$, $\forall u\in E$ on a

$$(-\alpha).u = \alpha.(-u) = -(\alpha.u).$$

R Afin d'alléger les écritures, nous convenons, dans tout ce qui suit, de l'abus suivant : pour tout scalaire α de $\mathbb{K}$ et pour tout vecteur u de E, on note αu le vecteur $\alpha.u$ de E.

1.2 Structure de sous-espace vectoriel

Définition 1.2.1 Soit $(E,+,.)$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Une partie F de E est un sous-espace vectoriel de E si
- F est non vide,
- $(F,+,.)$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

Théorème 1.2.1 Soit $(E,+,.)$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Une partie F de E est un sous-espace vectoriel de E si et seulement si
- F est non vide
- F est stable pour la loi $+$: $\forall (u,v) \in F^2$, $u+v \in F$
- F est stable pour la loi $.$: $\forall \lambda \in \mathbb{K}$, $\forall u \in F$, $\lambda u \in F$.

Démonstration.
- Par hypothèse F est non vide. Soit $\lambda \in \mathbb{K}$, $(u,v) \in F^2$. Comme F est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel on a $u+v \in F$ et $\lambda u \in F$.
- Pour montrer l'implication inverse, les seuls points à vérifier sont les points 3) et 4) de la loi interne $+$ (voir définition 1.1.2).
  Prenons $\lambda = 0$ et $u \in F$, alors $\lambda u = 0_E \in F$ et donc F possède un élément neutre pour la loi $+$.
  Soit $u \in F$, par définition il existe $v \in E$ tel que $u+v = v+u = 0_E$, donc $v = -u = (-1)u \in F$.
  Comme F est non vide, $(F,+,.)$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et donc F est un sous espace vectoriel de E.

■

On peut résumer le théorème précédent sous la forme suivante

Corollaire 1.2.2 Soit $(E,+,.)$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Une partie F de E est un sous-espace vectoriel de E si et seulement si
- F est non vide
- $\forall (\lambda,\mu) \in \mathbb{K}^2$, $\forall (u,v) \in F^2$, $\lambda u + \mu v \in F$.

Exemples
1. Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Alors le singleton $\{0_E\}$ et E sont des sous-espaces vectoriels de E.
2. L'ensemble $F = \{(x,-x,0) / \ x \in \mathbb{R}\}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.
3. L'ensemble des fonctions continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$.
4. L'ensemble des polynômes de $\mathbb{K}[X]$ de degré inférieur ou égal à un entier naturel n

$$\mathbb{K}_n[X] = \left\{ \sum_{k=0}^{n} a_k X^k / \ a_0, \ldots, a_n \in \mathbb{K} \right\}$$

   est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}[X]$.

Proposition 1.2.3 Soient F et G deux sous-espaces vectoriels d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E. Alors
1. $F \cap G$ est un sous-espace vectoriel de E,
2. $F \cup G$ n'est pas en général un sous-espace vectoriel de E.
3. Le complémentaire dans E, d'un sous-espace vectoriel F n'est pas un sous-espace vectoriel de E.

Démonstration. 1. Facile.

2. Considérons les deux sous-espaces F_1 et F_2 de l'espace produit $\mathbb{R}^2$ définis par

$$\begin{array}{lllll} F_1 & = & \mathbb{R}\times\{0\} & = & \{(x,0)/\ x\in\mathbb{R}\} \\ F_2 & = & \{0\}\times\mathbb{R} & = & \{(0,y)/\ y\in\mathbb{R}\}. \end{array}$$

L'ensemble $F_1 \cup F_2$ n'est pas un sous-espace de $\mathbb{R}^2$ puisque $(1,0) \in F_1$, $(0,1) \in F_2$ et $(1,0)+(0,1) = (1,1) \notin F_1 \cup F_2$.

3. Il suffit de remarquer que $0_E \notin \mathbf{C}_E(F)$.

■

Exercice 1.2.
Soient $F = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3,\ x-z=0\}$ et $G = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3,\ -x-y+z=0\}$.

1. Montrer que F et G sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$.
2. Déterminer $F \cap G$.

Définition 1.2.2 Soit $S = \{u_1,\dots,u_p\}$ une famille de vecteurs d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E. Une **combinaison linéaire** des éléments de S est tout élément u de E de la forme

$$u = \lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \ldots + \lambda_p u_p = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i u_i,\ \ (\lambda_1,\dots,\lambda_p) \in \mathbb{K}^p.$$

Les scalaires $\lambda_1,\dots,\lambda_p$ de $\mathbb{K}$ sont appelés **coefficients** de la combinaison linéaire.

Exemples

1. Tout vecteur $x = (x_1,x_2,x_3)$ de $\mathbb{K}^3$ est combinaison linéaire de la famille $\mathscr{F} = (e_i)_{1\le i\le 3}$ où $e_1 = (1,0,0)$, $e_2 = (0,1,0)$ et $e_3 = (0,0,1)$, car

$$\begin{array}{lll} x & = & (x_1,x_2,x_3) = (x_1,0,0)+(0,x_2,0)+(0,0,x_3) \\ & = & x_1(1,0,0)+x_2(0,1,0)+x_3(0,0,1) = x_1e_1+x_2e_2+x_3e_3. \end{array}$$

Les coefficients de la combinaison linéaire sont x_1, x_2 et x_3.

2. Dans $\mathbb{R}^3$, le vecteur $(2,1,0)$ est une combinaison linéaire des deux vecteurs $(1,0,0)$ et $(0,1,0)$. En effet,

$$(2,0,1) = 2\ (1,0,0) +\ (0,0,1).$$

3. Dans $\mathbb{R}_n[X]$, tout polynôme est une combinaison linéaire des éléments de la famille $(1,X,X^2,\dots,X^n)$.

Définition 1.2.3 Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et S une partie finie de E. On appelle **sous-espace engendré par** S, noté $\mathrm{Vect}(S)$, l'ensemble des combinaisons linéaires des éléments de S. La famille S est dite **génératrice** du sous-espace $\mathrm{Vect}(S)$.

Théorème 1.2.4 Le sous-espace engendré par une famille S d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E est un **sous-espace vectoriel** de E. C'est le plus petit sous-espace vectoriel de E (au sens de l'inclusion) contenant S.

Démonstration. Il suffit d'utiliser le théorème 1.2.1 . ■


Si $S = \{u_1, \ldots, u_p\}$, alors

$$\text{Vect}(S) = \left\{\lambda_1 u_1 + \ldots + \lambda_p u_p / \ (\lambda_1, \ldots, \lambda_p) \in \mathbb{K}^p\right\},$$

ou encore

$$u \in \text{Vect}(S) \Leftrightarrow \exists (\lambda_1, \ldots, \lambda_p) \in \mathbb{K}^p / \ u = \lambda_1 u_1 + \ldots + \lambda_p u_p.$$

Exemples

1. Si u est un vecteur d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E alors

$$\text{Vect}(\{u\}) = \{\alpha u / \ \alpha \in \mathbb{K}\} = \ \mathbb{K}u.$$

Donc $\text{Vect}(\{0_E\}) = \{0_E\}$ (cas où $u = 0_E$) et si $u \neq 0_E$ alors $\text{Vect}(\{u\})$ est la droite vectorielle engendrée par u.

2. Dans $\mathbb{R}^3$, soit $v_1 = (1,0,0)$ et $v_2 = (0,1,1)$, alors

$$\begin{aligned}\text{Vect}(v_1, v_2) &= \{\alpha v_1 + \beta v_2 / \ \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}\\ &= \{(\alpha, 0, 0) + (0, \beta, \beta) / \ \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}\\ &= \{(\alpha, \beta, \beta) / \ \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}\end{aligned}$$

Exercice 1.3.
Montrer que $\text{Vect}(\{1, X, X^2\}) = \mathbb{R}_2[X]$.

Proposition 1.2.5 Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $u_1, \ldots, u_p, u_{p+1}$ des vecteurs de E.

– Si u_{p+1} est combinaison linéaire des p autres vecteurs $u_1, \ldots, u_p$ alors

$$\text{Vect}(u_1, \ldots, u_p, v_{p+1}) = \text{Vect}(u_1, \ldots, u_p).$$

– En particulier,

$$\text{Vect}(u_1, \ldots, u_p, 0_E) = \text{Vect}(u_1, \ldots, u_p).$$

Exemple. Considérons dans $\mathbb{R}^4$ les trois vecteurs $v_1 = (1,1,0,-1)$, $v_2 = (1,2,1,0)$ et $v_3 = (3,5,2,-1)$. On a $v_3 = v_1 + 2v_2$. Le vecteur v_3 est ainsi combinaison linéaire des deux vecteurs v_1 et v_2. Donc

$$\text{Vect}(v_1, v_2, v_3) = \text{Vect}(v_1, v_2).$$

De manière équivalente, on écrit

$$\begin{aligned}\text{Vect}(v_1, v_2, v_3) &= \text{Vect}(v_1, v_2, v_3 - (v_1 + 2v_2))\\ &= \text{Vect}(v_1, v_2, 0_{\mathbb{R}^4})\\ &= \text{Vect}(v_1, v_2).\end{aligned}$$


Une méthode pour démontrer qu'une partie non vide F d'un espace vectoriel E est un sous-espace vectoriel de E est de montrer que F est égal à l'ensemble des combinaisons linéaires d'un nombre fini de vecteurs de E.

Exemple. Soit $F = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 / \ x - y - z = 0\}$. Un triplet $u = (x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ est un élément de F si, et seulement si, $x - y - z = 0$, c'est-à-dire si, et seulement si, $x = y + z$.
Donc $u \in F$ si, et seulement si, u peut s'écrire $u = (y+z, y, z)$. Or, on a l'égalité

$$(y+z, y, z) = y(1,1,0) + z(1,0,1).$$

Donc F est l'ensemble des combinaisons linéaires de la famille $\mathscr{S} = \{(1,1,0), (1,0,1)\}$. Ainsi $F = \text{Vect}(\mathscr{S})$ et F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.

1.3 Dépendance et indépendance linéaires

Définition 1.3.1 Soit $S = \{u_1, u_2, \dots, u_p\}$ une famille finie de vecteurs d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E.

- La famille S est dite **liée** si l'on peut trouver des scalaires $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_p$ appartenant à $\mathbb{K}$, dont un au moins est non nul [a] tels que
$$\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \dots + \alpha_p u_p = 0_E. \tag{1.1}$$
On dit également que les vecteurs $u_1, u_2, \dots, u_p$ sont **linéairement dépendants**.
- Si la famille n'est pas liée, on dit qu'elle est **libre** (ou que les vecteurs sont **linéairement indépendants**).

a. On dit **non tous nuls** et on écrit $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_p) \neq (0, 0, \dots, 0)$

En d'autres termes, on dit qu'une famille finie $S = \{u_1, u_2, \dots, u_p\}$ est libre si la seule possibilité pour que la combinaison linéaire $\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \dots + \alpha_p u_p$ soit nulle, est que les coefficients $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_p$ soient tous nuls. En pratique, pour montrer que la famille $S = \{u_1, u_2, \dots, u_p\}$ est libre, on montre que la relation (1.1) entraîne nécessairement que
$$\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_p = 0.$$



R Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, alors la famille $\{0_E\}$ est liée.

Exemples

1. Dans $\mathbb{C}^4$, les vecteurs $v_1 = (1, 0, 1, 1)$, $v_2 = (0, 2, 2i, 6)$ et $v_3 = (1, i, 0, 1 + 3i)$, où $i^2 = -1$ sont liés puisque
$$v_1 + \frac{i}{2} v_2 - v_3 = 0_{\mathbb{C}^4}.$$
2. Dans $\mathbb{R}^3$, les vecteurs $v_1 = (1, 1, -1)$, $v_2 = (0, 2, 1)$ et $v_3 = (0, 0, 5)$ sont linéairement indépendants.
3. Soit f_1, f_2 et f_3 trois fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définies comme suit
$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f_1(x) = \cos^2(x), \; f_2(x) = \cos(2x), \; f_3(x) = 1.$$
La relation $\cos(2x) = 2\cos^2(x) - 1$ implique que la famille $\{f_1, f_2, f_3\}$ est une famille liée dans le $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathscr{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

Proposition 1.3.1 Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

- Soit v un vecteur de E. La famille $\{v\}$ est libre si et seulement si $v \neq 0_E$.
- Une famille contenue dans une famille libre est libre.
- Une famille qui contient une famille liée est liée. En particulier toute famille qui contient 0_E est liée.

La proposition suivante donne une caractérisation d'une famille liée.

Proposition 1.3.2 Soit E un K-espace vectoriel et $p \geq 2$ un entier. Une famille $S = \{u_1, u_2, \dots, u_p\}$ de vecteurs de E est liée si et seulement si l'un de ses vecteurs, soit u_i, est combinaison linéaire des éléments de la famille $\{u_1, u_2, \dots, u_{i-1}, u_{i+1}, \dots, u_p\}$.

Démonstration. – Supposons que la famille S est liée, il existe des scalaires $\alpha_1, \ldots, \alpha_p$ non tous nuls tels que
$$\alpha_1 u_1 + \ldots + \alpha_p u_p = 0_E.$$
Soit i tel que $\alpha_i \neq 0$. Alors
$$u_i = -\frac{\alpha_1}{\alpha_i} u_1 - \ldots - \frac{\alpha_{i-1}}{\alpha_i} u_{i-1} - \frac{\alpha_{i+1}}{\alpha_i} u_{i+1} - \ldots - \frac{\alpha_p}{\alpha_i} u_p.$$
Le vecteur u_i est donc une combinaison linéaire des éléments de la famille
$$\{u_1, u_2, \ldots, u_{i-1}, u_{i+1}, \ldots, u_p\}.$$

– Supposons qu'un vecteur u_i s'écrit
$$u_i = \alpha_1 u_1 + \ldots + \alpha_{i-1} u_{i-1} + \alpha_{i+1} u_{i+1} + \ldots + \alpha_p u_p.$$
Alors
$$\alpha_1 u_1 + \ldots + \alpha_{i-1} u_{i-1} - u_i + \alpha_{i+1} u_{i+1} + \ldots + \alpha_p u_p = 0_E.$$
Ceci implique que la famille S est liée.

■

Exemples

1. Dans $\mathbb{R}^3$, soit les vecteurs $v_1 = (1,0,-1)$, $v_2 = (1,1,1)$ et $v_3 = (5,3,1)$. On a $v_3 = 2v_1 + 3v_2$, et donc la famille $\{v_1, v_2, v_3\}$ est liée.
2. Considérons les polynômes $P_1 = X + 1$, $P_2 = -1 + 2X + 3X^2$ et $P_3 = X + X^2$. On a $P_1 + P_2 - 3P_3 = 0$, ce qui implique que la famille $\{P_1, P_2, P_3\}$ est liée.

Proposition 1.3.3 Soit $V = \{v_1, v_2, \ldots, v_p\}$ une famille libre d'un K-espace vectoriel E. Si x est un vecteur quelconque de $\text{Vect}(V)$, alors la décomposition de x sur les v_i, $i = 1, \ldots, p$ est unique.

Démonstration. Si $x = \alpha_1 v_1 + \ldots + \alpha_p v_p = \lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_p v_p$, alors
$$(\alpha_1 - \lambda_1) v_1 + \ldots + (\alpha_p - \lambda_p) v_p = 0.$$
Ceci implique que $\alpha_i = \lambda_i$ car la famille V est libre. ■

1.4 Bases et dimension d'un espace vectoriel

Définition 1.4.1 Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. On dit que E est de **dimension finie** s'il existe une famille finie $V = \{v_1, \ldots, v_n\}$ de vecteurs de E telle que $E = \text{Vect}(V)$.

Exemples

1. Pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, le $\mathbb{K}$-espace vectoriel $\mathbb{K}^n$ est de dimension finie. Il est engendré par la famille $(e_1, e_2, \ldots, e_n)$ où $e_i = (0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots, 0)$ (1 est dans la $i^{\text{ème}}$ position).
2. L'espace vectoriel $\mathbb{K}[X]$ n'est pas de dimension finie.

Définition 1.4.2 Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie. On appelle **base** de E toute famille de vecteurs de E qui est libre et génératrice.

Proposition 1.4.1 Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie. La famille $V = \{v_1, \dots, v_n\}$ est une base de E si, et seulement si,

$$\forall x \in E,\ \exists!(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{K}^n : \quad x = \alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_n v_n.$$

Théorème 1.4.2 Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie. Alors toutes les bases de E ont le même cardinal.

Définition 1.4.3 Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie. Le cardinal d'une base de E s'appelle la **dimension** de E. La dimension d'un sous-espace vectoriel de E est sa dimension en tant que $\mathbb{K}$-espace vectoriel.



Par convention la dimension du sous-espace vectoriel $\{0_E\}$ est égale à 0.

Exemples

1. Soit $E = \mathbb{K}^2$, $e_1 = (1,0)$ et $e_2 = (0,1)$. La famille $\mathscr{B} = \{e_1, e_2\}$ est génératrice de E puisque tout vecteur $v = (x_1, x_2) \in E$ s'écrit $v = x_1 e_1 + x_2 e_2$. De plus on vérifie aisément que $\mathscr{B}$ est libre. C'est donc une base de E.
2. Tout polynôme P de $\mathbb{K}_n[X]$ s'écrit sous la forme

$$P = a_0 + a_1 X + \dots + a_n X^n.$$

   La famille $\mathscr{B} = (X^i)_{0 \le i \le n} = (1, X, X^2, \dots, X^n)$ est alors génératrice. De plus, cette décomposition est unique, et par conséquent la famille finie $\mathscr{B}$ est une base de $\mathbb{K}_n[X]$ et $\dim \mathbb{K}_n[X] = n+1$. On l'appelle base canonique de $\mathbb{K}_n[X]$. Les éléments $a_0, a_1, \dots, a_n$ de $\mathbb{K}$ sont les coordonnées de P par rapport à cette base.
3. Tout vecteur $x = (x_1, \dots, x_n)$ du $\mathbb{K}$-espace vectoriel $\mathbb{K}^n$ s'écrit

$$x = x_1 e_1 + \dots + x_n e_n,$$

   avec

$$e_1 = (1, 0, \dots, 0),\ e_2 = (0, 1, 0, \dots, 0),\ \dots,\ e_n = (0, \dots, 0, 1).$$

   La famille $\mathscr{B} = (e_1, \dots, e_n)$ est ainsi génératrice de $\mathbb{K}^n$. De plus, cette famille est libre. Par conséquent la famille $\mathscr{B}$ est une base de $\mathbb{K}^n$ et $\dim \mathbb{K}^n = n$. On l'appelle base canonique de $\mathbb{K}^n$. Par conséquent $x_1, \dots, x_n$ sont les coordonnées du vecteur x de $\mathbb{K}^n$ dans cette base.
4. Soit $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 /\ 2x + y + 3z = 0\}$. On a F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$, et

$$u = (x, y, z) \in F \Leftrightarrow y = -2x - 3z.$$

   Donc $u \in F$ si, et seulement si, $u = (x, -2x - 3z, z) = x(1, -2, 0) + z(0, -3, 1)$. Ceci implique que les deux vecteurs $v_1 = (1, -2, 0)$ et $v_2 = (0, -3, 1)$ engendrent F. On vérifie qu'ils forment une famille libre, donc c'est une base de F.

Exercice 1.4.

Dans $\mathbb{R}^3$ muni de sa structure de $\mathbb{R}$-espace vectoriel, on considère les quatre vecteurs $v_1 = (1, 1, 2)$, $v_2 = (1, -1, 0)$, $v_3 = (0, 0, -1)$ et $x = (1, 1, 1)$.

1. Quelles sont les coordonnées de x dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$?
2. Montrer que les vecteurs v_1, v_2 et v_3 forment une base de $\mathbb{R}^3$.

3. Déterminer les coordonnées du vecteur x dans cette nouvelle base.

Théorème 1.4.3 Un $\mathbb{K}$-espace vectoriel $E \neq \{0_E\}$ de dimension finie possède au moins une base finie.

Une autre version du théorème précédent est le suivant

Théorème 1.4.4 Soit $E \neq \{0_E\}$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie. Alors

1. De toute famille génératrice de E on peut extraire une base pour E.
2. (**Théorème de la base incomplète**) Toute famille libre de E peut être complétée pour former une base de E.

La proposition suivante donne le lien entre le cardinal d'une famille génératrice ou libre et celle d'une base.

Proposition 1.4.5 Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie n.

1. Toute famille $\mathscr{G}$ génératrice de E vérifie $\operatorname{card}(\mathscr{G}) \geq n$. En particulier, toute famille génératrice constituée de n vecteurs est une base de E.
2. Toute famille $\mathscr{L}$ libre de E vérifie $\operatorname{card}(\mathscr{L}) \leq n$. En particulier, toute famille libre constituée de n vecteurs est une base de E.

Proposition 1.4.6 Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n et F un sous-espace vectoriel de E. Alors F est de dimension finie et $\dim(F) \leq \dim(E)$. En particulier, si $\dim(F) = \dim(E)$ alors $E = F$.

Démonstration. Soit $\mathscr{B}$ une base de F. La famille $\mathscr{B}$ est libre dans E. Par le théorème de la base incomplète, elle est contenue dans une base de E. Donc $\dim(F) \leq \dim(E)$.
Supposons que $\dim(F) = \dim(E)$ et soit $\mathscr{B}$ une base de F. La famille $\mathscr{B}$ est libre de E qui contient n éléments. Elle est donc une base de E. D'où $E = F$. ■

Exercice 1.5.
On considère dans $\mathbb{R}_3[X]$ les polynômes $P_1 = 1 + X^3$, $P_2 = 1 - X^2$ et $P_3 = 1$.

1. La famille $\{P_1, P_2, P_3\}$ est-elle libre ?
2. Déterminer un polynôme P_4 tel que la famille $\{P_1, P_2, P_3, P_4\}$ soit une base de $\mathbb{R}_3[X]$.

1.5 Somme de sous-espaces vectoriels

Définition 1.5.1 Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et F, G deux sous-espaces vectoriels de E.

1. La **somme** de F et G est le sous-espace de E, noté $F + G$, défini par
$$F + G = \{w = u + v / \ u \in F, \ v \in G\}.$$
2. En particulier, la **somme** de F et G est dite **directe** si
$$\forall w \in F + G, \ \exists! \ u \in F, \ \exists! \ v \in G, \ w = u + v.$$
Les vecteurs u et v sont alors appelés les **composantes** du vecteur w respectivement dans F et dans G, et le sous-espace $F + G$ se note $F \oplus G$.

3. On dit que F et G sont **supplémentaires** dans E si
$$E = F \oplus G.$$

Théorème 1.5.1 Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et F, G deux sous espaces vectoriels de E. Une condition nécessaire et suffisante pour que la somme de F et G soit directe est que leur intersection soit réduite au vecteur nul, c'est-à-dire
$$F \cap G = \{0_E\}.$$



1. On peut montrer, en utilisant le théorème de la base incomplète, que tout sous-espace vectoriel d'un $\mathbb{K}$-espace possède au moins un supplémentaire dans E.

Théorème 1.5.2 Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Si F et G sont deux sous espaces vectoriels de E alors $F+G$ et $F \oplus G$ sont des sous-espaces vectoriels de E.

Démonstration. Facile. ■

Théorème 1.5.3 — Grassmann. Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et F, G des sous-espaces vectoriels de E. Alors
$$\dim(F+G) = \dim(F) + \dim(G) - \dim(F \cap G).$$

Les propositions suivantes présentent les conditions que deux sous-espaces vectoriels doivent remplir pour qu'ils soient supplémentaires.

Proposition 1.5.4 Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et F, G deux sous-espaces de E. Alors
$$(E = F \oplus G) \Leftrightarrow (E = F + G \text{ et } F \cap G = \{0_E\}).$$

Proposition 1.5.5 Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et F, G des sous-espaces vectoriels de E. Alors $E = F \oplus G$ si, et seulement si, pour toute base $\mathscr{B}_1$ de F et pour toute base $\mathscr{B}_2$ de G, $\mathscr{B}_1 \cup \mathscr{B}_2$ est une base de E.

Théorème 1.5.6 Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et F, G des sous-espaces vectoriels de E. Alors
$$(E = F \oplus G) \Leftrightarrow (F \cap G = \{0_E\} \text{ et } \dim(F) + \dim(G) = \dim(E)).$$

Exemples
1. Soit $E = \mathbb{R}^3$, $F = \text{Vect}(1,1,1)$ et $G = \text{Vect}\{(1,0,-1),(0,1,-1)\}$. Alors $E = F \oplus G$. En effet, $F \cap G = \{0_E\}$ et $\dim F + \dim G = 1 + 2 = 3$.
2. Soit $E = \mathbb{R}_3[X]$, $F = \mathbb{R}$ et $G = \{XP /\ P \in \mathbb{R}_2[X]\}$. Alors $E = F \oplus G$.

1.6 Rang d'un système de vecteurs

Définition 1.6.1 Le **rang** d'un ensemble fini de vecteurs $S = \{u_1, u_2, \ldots, u_p\}$ d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel est égal au plus grand nombre de vecteurs linéairement indépendants que l'on peut extraire de S (donc il est égal à la dimension du sous-espace vectoriel engendré par S). On le

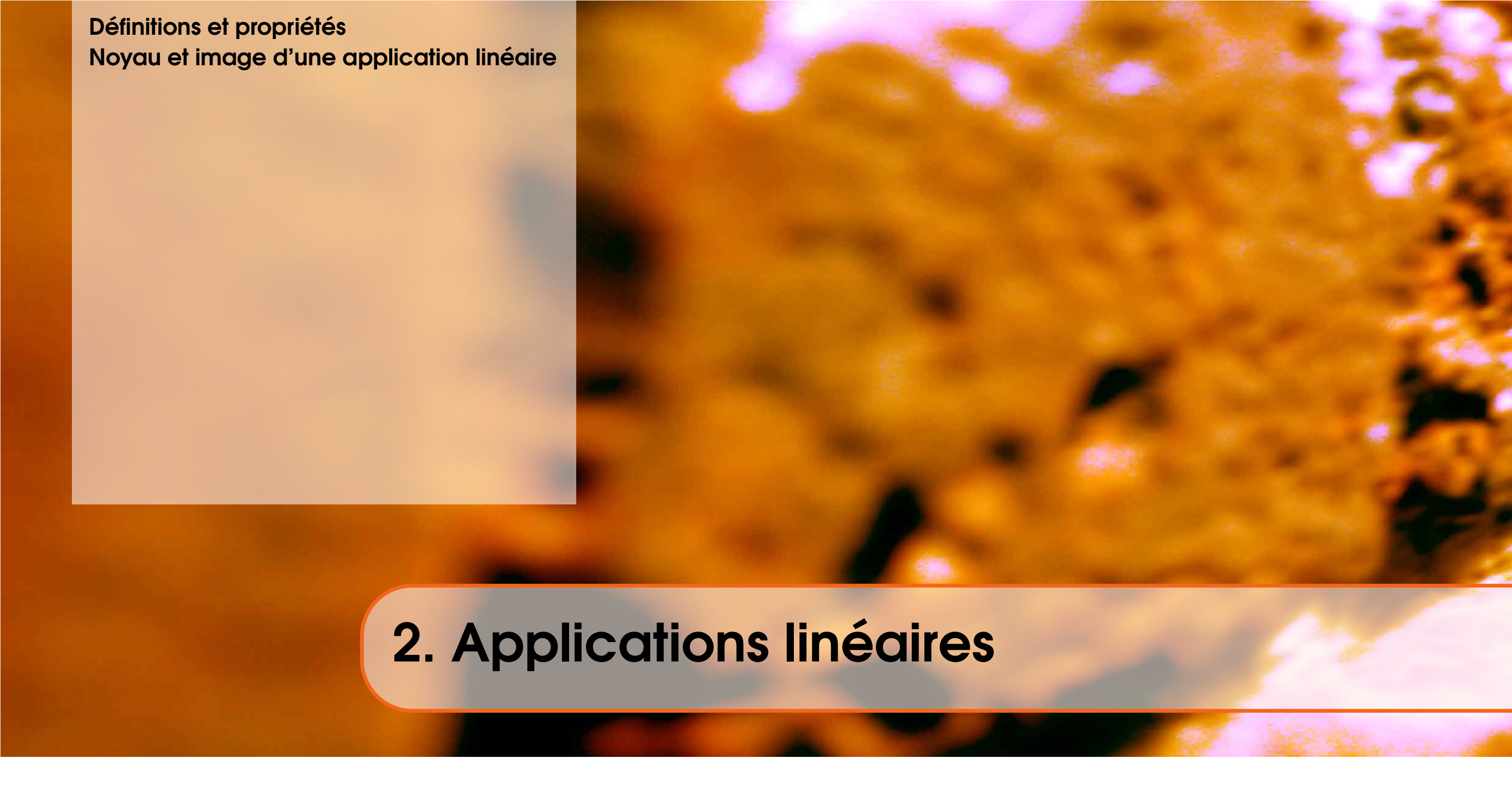
note $\mathrm{rg}(S)$.

Proposition 1.6.1 Soit $\{u_1,\dots,u_p\}$ une famille de vecteurs d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E.

1. $\mathrm{rg}(\{u_1,\dots,u_p\}) \leq p$
2. $\mathrm{rg}(\{u_1,\dots,u_p\}) = p \Leftrightarrow \{u_1,\dots,u_p\}$ libre.

Exemple
Considérons dans $\mathbb{R}^4$ les vecteurs $u = (1,-1,1,0)$, $v = (1,1,,0,1)$ et $w = (2,0,1,1)$. On a alors $\mathrm{rg}(\{u,v,w\}) \leq 3$. Or $w = u+v$, donc $w \in \mathrm{Vect}(\{u,v\})$ et $\mathrm{rg}(\{u,v,w\}) = \mathrm{rg}(\{u,v\}) = 2$ car la famille $\{u,v\}$ est libre.





2. Applications linéaires

2.1 Définitions et propriétés

Définition 2.1.1 Soit E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels.

1. Une application f de E dans F est dite **linéaire** si, et seulement si,
   i. $\forall (u,v) \in E^2,\ f(u+v) = f(u) + f(v)$,
   ii. $\forall \alpha \in \mathbb{K},\ \forall u \in E,\ f(\alpha\, u) = \alpha f(u)$.
   Les deux relations $i)$ et $ii)$ peuvent s'écrire sous la forme unique suivante
   $$\forall (\alpha,\beta) \in \mathbb{K}^2,\ \forall (u,v) \in E^2,\ \ f(\alpha u + \beta v) = \alpha f(u) + \beta f(v).$$
   On dit aussi que f est un **morphisme** d'espaces vectoriels.
2. Un **endomorphisme** de E est une application linéaire de E dans E.
3. Un **isomorphisme** de E sur F est un morphisme d'espaces vectoriels bijectif.
4. Un **automorphisme** de E est un endomorphisme bijectif de E.

Notations

1. L'ensemble des applications linéaires de E dans F est noté $\mathscr{L}(E,F)$. L'ensemble des endomorphismes de E est simplement noté $\mathscr{L}(E)$.
2. L'ensemble des isomorphismes de E sur F est noté $\mathrm{Isom}(E,F)$.
3. L'ensemble des automorphismes de E est noté $\mathrm{GL}(E)$.

Exemples

1. L'application f définie par
   $$f: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^2 \\ (x,y,z) & \mapsto & (x+2y,\ x-z), \end{array}$$
   est linéaire.
2. L'application f définie par
   $$f: \begin{array}{ccc} \mathbb{K}[X] & \to & \mathbb{K}[X] \\ P & \mapsto & P', \end{array}$$
   où P' est la dérivée de P, est un endomorphisme.

3. L'application f définie par

$$f: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^3 \\ (x,y,z) & \mapsto & (x+y+z,\ x-y+z,\ x+y-z), \end{array}$$

est un isomorphisme.

4. L'application id_E définie par

$$\mathrm{id}_E: \begin{array}{ccc} E & \to & E \\ u & \mapsto & u, \end{array}$$

est un automorphisme.

Propriétés

Soit E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels.

1. Si $f \in \mathscr{L}(E,F)$ alors $f(0_E) = 0_F$,
2. Si $f \in \mathscr{L}(E,F)$ alors $\forall u \in E,\ f(-u) = -f(u)$.
3. Soient $f,\ g \in \mathscr{L}(E,F)$ et $\lambda \in \mathbb{K}$. Les applications $f+g$ et λf définies par

$$\forall x \in E,\ \ (f+g)(x) = f(x)+g(x) \ \text{ et } (\lambda f)(x) = \lambda f(x),$$

sont des éléments de $\mathscr{L}(E,F)$. Muni de ces deux lois, $\mathscr{L}(E,F)$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

Proposition 2.1.1 Soit E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimension respectives n et m. Soient $\mathscr{B} = \{e_1, \ldots, e_n\}$ une base de E, et $f \in \mathscr{L}(E,F)$. Alors f est entièrement déterminée par les images $f(e_i),\ i = 1, \ldots, n$.

Démonstration. Tout vecteur x de E se décompose d'une manière unique dans la base $\mathscr{B}$ sous la forme

$$x = x_1 e_1 + x_2 e_2 + \ldots + x_n e_n,$$

où $x_1, \ldots, x_n$ appartenant à $\mathbb{K}$ sont les coordonnées de x dans la base $\mathscr{B}$. Puisque f est linéaire, alors

$$\begin{aligned} f(x) &= f(x_1 e_1 + x_2 e_2 + \ldots + x_n e_n) \\ &= x_1 f(e_1) + x_2 f(e_2) + \ldots + x_n f(e_n). \end{aligned}$$

■

Exemple. Soient $\mathscr{B} = \{e_1, e_2, e_3\}$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$ et l'application $f:\ \mathbb{R}^3 \mapsto \mathbb{R}^3$ définie par

$$\begin{aligned} f(e_1) &= e_1 + e_2 \\ f(e_2) &= e_1 - e_2 \\ f(e_3) &= e_1 + e_3. \end{aligned}$$

On montre facilement que f est l'application linéaire de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^3$ définie par

$$\forall x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3,\ f(x) = (x_1 + x_2 + x_3,\ x_1 - x_2,\ x_3).$$

2.2 Noyau et image d'une application linéaire

Définition 2.2.1 Soit E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels et soit $f \in \mathscr{L}(E,F)$.

– On appelle noyau de f et on note $\mathrm{Ker} f$ l'ensemble des éléments de E dont l'image est 0_F

$$\mathrm{Ker} f = \{u \in E /\ f(u) = 0_F\}.$$

– On appelle image de f et on note $\mathrm{Im} f$ l'ensemble des éléments de F qui sont l'image

d'au moins un élément de E

$$\mathrm{Im} f = \{v \in F / \ \exists u \in E, \ f(u) = v\} = f(E).$$

Proposition 2.2.1 Soit E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimension finie et soit $f \in \mathscr{L}(E,F)$. Si $E = \mathrm{Vect}\{e_1,\ldots,e_n\}$ alors $\mathrm{Im} f = \mathrm{Vect}\{f(e_1),\ldots,f(e_n)\}$.

Démonstration. Soit $v \in \mathrm{Im} f$. Alors il existe $u \in E$ tel que $f(u) = v$. Puisque $E = \mathrm{Vect}\{e_1,\ldots,e_n\}$ alors il existe des scalaires $\alpha_1,\ldots,\alpha_n$ appartenant à $\mathbb{K}$ tels que $u = \alpha_1 u_1 + \ldots + \alpha_n u_n$. Ceci implique

$$v = f(u) = \alpha_1 f(u_1) + \ldots + \alpha_n f(u_n),$$

car f est linéaire. Par conséquent $\mathrm{Im} f = \mathrm{Vect}\{f(e_1),\ldots,f(e_n)\}$.

■

Exemples

1. Soit $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ l'application linéaire définie par $f(x,y,z) = (x+2y, \ x-z)$.

$$\begin{aligned} \mathrm{Ker} f &= \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 / \ (x+2y, x-z) = (0,0) = 0_{\mathbb{R}^2}\right\} \\ &= \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 / \ x = -2y \text{ et } x = z\right\} \\ &= \{(-2y, y, -2y) / \ y \in \mathbb{R}\} \\ &= \mathrm{Vect}\{(-2,1,-2)\}, \end{aligned}$$

et $\dim(\mathrm{Ker} f) = 1$.

$$\begin{aligned} \mathrm{Im} f &= f(\mathbb{R}^3) \ \text{(par définition)} \\ &= f\left(\mathrm{Vect}\{e_1,e_2,e_2\}\right), \ (\{e_1,e_2,e_3\} \text{ étant la base canonique de } \mathbb{R}^3) \\ &= \mathrm{Vect}\left\{f(e_1), f(e_2), f(e_3)\right\}, \ (\text{car } f \text{ est linéaire}) \\ &= \mathrm{Vect}\left\{(1,1), \ (2,0), \ (0,-1)\right\}, \end{aligned}$$

et $\dim(\mathrm{Im} f) = 2$.

2. Soit $f : \mathbb{R}_2[X] \mapsto \mathbb{R}^3$ l'application linéaire définie par $f(P) = (P(0), P(1), P(2))$.

$$\begin{aligned} \mathrm{Ker} f &= \left\{P = a_0 + a_1 X + a_2 X^2 \in \mathbb{R}_2[X], \ (a_0,a_1,a_2) \in \mathbb{R}^3 / \ (P(0),P(1),P(2)) = 0_{\mathbb{R}^3}\right\} \\ &= \{0_{\mathbb{R}_2[X]}\}, \end{aligned}$$

et $\dim(\mathrm{Ker} f) = 0$.

$$\begin{aligned} \mathrm{Im} f &= f(\mathbb{R}_2[X]) \\ &= f(\mathrm{Vect}\{1, X, X^2\}) \\ &= \mathrm{Vect}\{f(1), f(X), f(X^2)\} \\ &= \mathrm{Vect}\{(1,1,1), \ (0,1,2), \ (0,1,4)\}, \end{aligned}$$

et $\dim(\mathrm{Im} f) = 3$.

Proposition 2.2.2 Soit E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels et soit $f \in \mathscr{L}(E,F)$. Alors
1. $\mathrm{Ker} f$ est un sous-espace vectoriel de E,
2. $\mathrm{Im} f$ est un sous-espace vectoriel de F.

Démonstration. Facile

■

Théorème 2.2.3 Soit E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels et soit $f \in \mathscr{L}(E,F)$. Alors
1. f est injective $\Leftrightarrow \operatorname{Ker} f = \{0_E\}$.
2. f est surjective $\Leftrightarrow \operatorname{Im} f = F$.

Démonstration.
1. Rappelons que f est injective si, et seulement si, $\forall u, v \in E$ on a

$$f(u) = f(v) \Rightarrow u = v.$$

   – Supposons que f est injective. Considérons un vecteur u de $\operatorname{Ker} f$, alors $f(u) = 0_F$. Puisque $f(0_E) = 0_F$, on aura $f(u) = f(0_E)$. Or f est injective, donc $u = 0_E$ et par conséquent $\operatorname{Ker} f = \{0_E\}$.
   – Supposons que $\operatorname{Ker} f = \{0_E\}$ et soit $u, v \in E$ tels que $f(u) = f(v)$. Comme f est linéaire, on a

$$f(u-v) = f(u) - f(v) = 0_F.$$

   Ceci implique que $u - v = 0_E$ et $u = v$. D'où f est injective.
2. f est surjective si, et seulement si, pour tout $v \in F$ il existe $u \in E$ tel que $f(u) = v$. D'où f est surjective si, et seulement si, $\operatorname{Im} f = F$.

■

Exemple. Soit f l'application linéaire qui à tout polynôme P de $\mathbb{R}_2[X]$ lui associe le vecteur $f(P) = (P(-1), P(0), P(1))$ de $\mathbb{R}^3$.
- Soit $P = aX^2 + bX + c \in \operatorname{Ker} f$, où $a, b, c \in \mathbb{R}$. Alors $f(P) = (a-b+c, c, a+b+c) = 0_{\mathbb{R}^3}$. Ceci implique que $a = b = c = 0$, et $P = 0_{\mathbb{R}_2[X]}$. Ainsi, $\operatorname{Ker} f = \left\{0_{\mathbb{R}_2[X]}\right\}$. Par conséquent, f est injective.
- Puisque $\mathbb{R}_2[X] = \operatorname{Vect}(1, X, X^2)$ et f est une application linéaire, alors

$$\begin{aligned} \operatorname{Im} f &= \operatorname{Vect}(f(1), f(X), f(X^2)) \\ &= \operatorname{Vect}(v_1, v_2, v_3), \end{aligned}$$

  où $v_1 = (1,1,1)$, $v_2 = (-1,0,1)$ et $v_3 = (1,0,1)$. On vérifie facilement que la famille $\{v_1, v_2, v_3\}$ est une base de $\mathbb{R}^3$, et donc $\dim(\operatorname{Im} f) = 3 = \dim(\mathbb{R}^3)$. Puisque $\operatorname{Im} f$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ alors $\operatorname{Im} f = \mathbb{R}^3$. Par conséquent, f est surjective.

Exercice 2.1.
Soit f l'application linéaire qui à tout polynôme P de $\mathbb{R}_2[X]$ lui associe

$$f(P) = 2(X+1)P - (X^2 - 2X + 1)P'.$$

Déterminer $\operatorname{Im} f$, $\operatorname{Ker} f$ et la dimension de chacun de ces deux espaces.

Proposition 2.2.4 Soit E, F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels, $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ une famille **libre** dans E et $f \in \mathscr{L}(E,F)$. Si f est **injective** alors $\{f(v_1), f(v_2), \ldots, f(v_n)\}$ est une famille **libre** de F.

Démonstration. Soit $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ des scalaires appartenant à $\mathbb{K}$ tels que

$$\alpha_1 f(v_1) + \alpha_2 f(v_2) + \ldots + \alpha_n f(v_n) = 0_F.$$

Puisque $0_F = f(0_E)$ et f est linéaire, alors

$$f(\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \ldots + \alpha_n v_n) = f(0_E).$$

Or f est injective, ainsi

$$\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \ldots + \alpha_n v_n = 0_E.$$

Ceci implique

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_n = 0_{\mathbb{K}},$$

car la famille $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ est libre. Par conséquent, la famille $\{f(v_1), f(v_2), \ldots, f(v_n)\}$ est libre.

■

Exemple. Reprenons l'application linéaire f définie dans l'exemple précédent. La famille $\{1, X-1, X^2+1\}$ est libre. Puisque f est injective alors la famille $\{f(1), f(X-1), f(X^2+1)\}$ est libre dans $\mathbb{R}^3$.

Définition 2.2.2 Soit E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimension finie et soit $f \in \mathscr{L}(E,F)$. On appelle **rang** de f et on note $\mathrm{rg} f$ la dimension du sous-espace vectoriel $\mathrm{Im} f$

$$\mathrm{rg} f = \dim(\mathrm{Im} f).$$

Théorème 2.2.5 — du rang. Soit E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimensions finies. Pour toute application $f \in \mathscr{L}(E,F)$, on a

$$\dim E = \mathrm{rg} f + \dim(\mathrm{Ker} f).$$

Exemple. Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ défini par

$$f(x,y,z) = (x-y,\ z,\ 0).$$

Soit $\mathscr{B} = \{e_1, e_2, e_3\}$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$. On a $\mathrm{Ker} f = \mathrm{Vect}\{(1,1,0)\}$, donc $\mathrm{rg} f = 2$. De plus $f(e_1) = e_1$, $f(e_2) = -e_1$ et $f(e_3) = e_2$. Ceci implique que $e_1 \in \mathrm{Im} f$ et $e_2 \in \mathrm{Im} f$. Comme $\{e_1, e_2\}$ est libre, on aura $\mathrm{Im} f = \mathrm{Vect}\{e_1, e_2\}$.

Proposition 2.2.6 Soit E, F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimensions finies et $f \in \mathscr{L}(E,F)$. On a alors les équivalences suivantes

1. f est surjective $\Leftrightarrow \mathrm{rg} f = \dim F$,
2. f est injective $\Leftrightarrow \mathrm{rg} f = \dim E$,
3. f est bijective $\Leftrightarrow \mathrm{rg} f = \dim E = \dim F$.

Corollaire 2.2.7 Soit E, F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimensions finies et $f \in \mathscr{L}(E,F)$. Si $\dim E = \dim F$ alors

$$f \text{ est bijective } \Leftrightarrow f \text{ est injective } \Leftrightarrow f \text{ est surjective.}$$

Définition 2.2.3 Soit E, F et G trois $\mathbb{K}$-espaces vectoriels. Soit $f \in \mathscr{L}(E,F)$ et $g \in \mathscr{L}(F,G)$. On appelle composée de ces deux applications g et f l'application linéaire notée gof de E dans G et qui est définie par

$$\forall u \in E,\ (gof)(u) = g(f(u)).$$

Exemple. Soit les deux applications linéaires

$$f: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^2 \\ (x,y,z) & \mapsto & (x-3y,\ y+2z), \end{array}$$

et

$$g: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^3 \\ (x,y) & \mapsto & (3y,\ x,\ 0). \end{array}$$

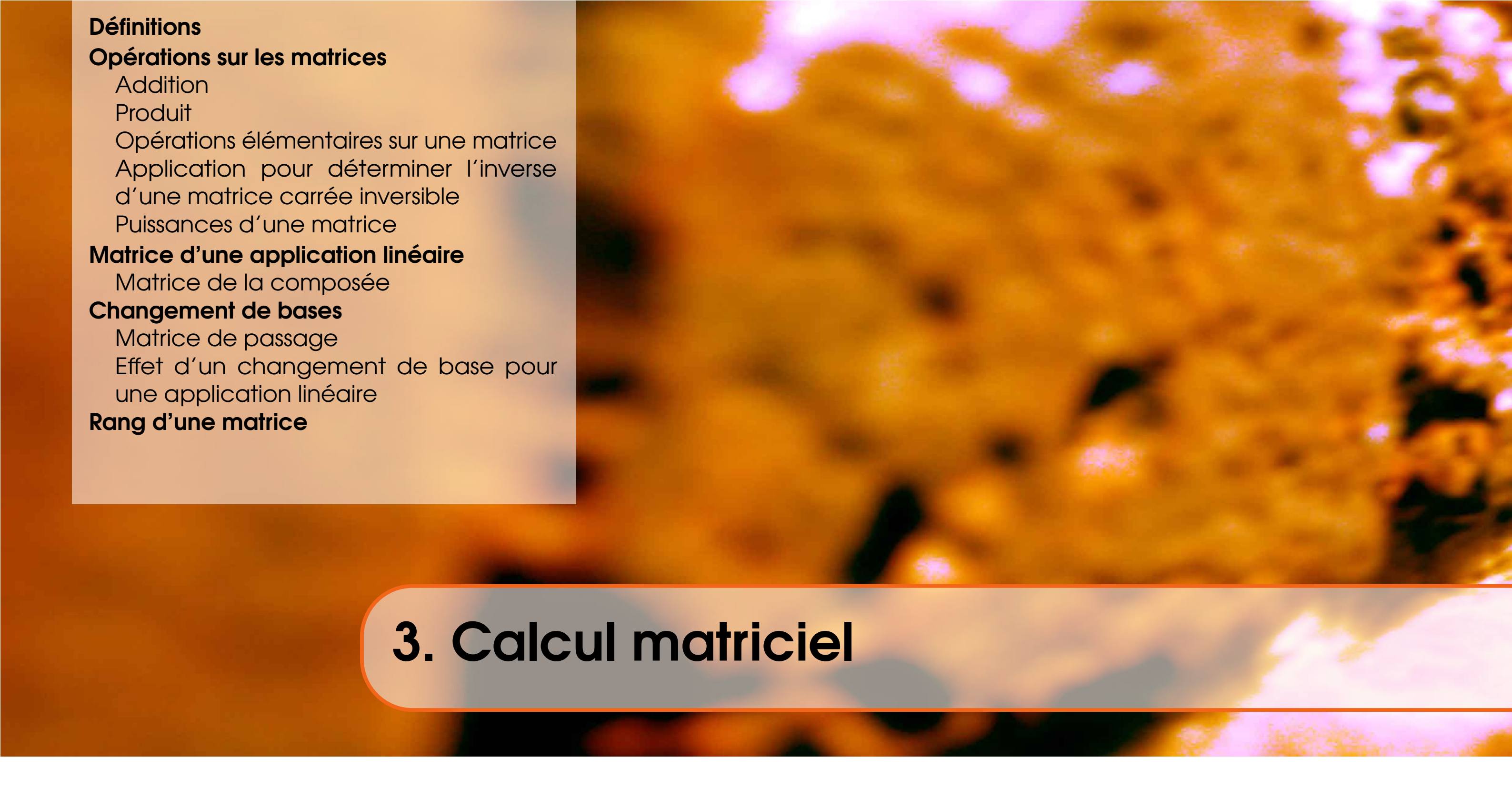
Alors l'application composée gof est donnée par

$$gof: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^3 \\ (x,y,z) & \mapsto & (3y+6z,\ x-3y,\ 0). \end{array}$$

Exercice 2.2.
Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel tel que $\dim E = 3$ muni d'une base $\mathscr{B} = \{u,v,w\}$ et p un endomorphisme de E défini par

$$p(u) = u+v+w, \quad p(v) = -\frac{1}{2}(u+v+w), \quad p(w) = \frac{1}{2}(u+v+w).$$

Montrer que p est un projecteur de E (c.-à.d. $pop = p$), puis caractériser $\mathrm{Im}p$ et $\mathrm{Ker}p$.



3. Calcul matriciel

Dans tout ce qui suit, $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, m et n sont deux entiers naturels non nuls.

3.1 Définitions

Définition 3.1.1 Un tableau rectangulaire de nombres ($\in \mathbb{K}$), de la forme

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix},$$

est appelé matrice d'ordre (m,n) ou de type (m,n) (m lignes et n colonnes).

- Le nombre a_{ij}, $1 \leq i \leq m$, $1 \leq j \leq n$ s'appelle coefficient de la matrice A.
- Dans la notation a_{ij}, $1 \leq i \leq m$, $1 \leq j \leq n$, i désigne le numéro de la ligne, et j celui de la colonne.

Définition 3.1.2 Deux matrices $A = (a_{ij})$ et $B = (b_{ij})$ de même ordre (m,n) sont égales si et seulement si $a_{ij} = b_{ij}$, pour tout $(i,j) \in \{1,\dots,m\} \times \{1,\dots,n\}$.

Exemples

1. $A = \begin{pmatrix} 3 & 5 & -1 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}$ est une matrice d'ordre $(2,3)$.
2. $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & -1 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}$ est une matrice d'ordre $(3,2)$.

Notations. L'ensemble des matrices d'ordre (m,n) à coefficients dans $\mathbb{K}$ est noté $\mathscr{M}_{m,n}(\mathbb{K})$. Lorsque $m = n$ on note cet ensemble par $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.

Quelques types de matrices

- **Matrice uniligne** : C'est une matrice d'ordre $(1,n)$ (matrice qui admet une seule ligne).
- **Matrice unicolonne** : C'est une matrice d'ordre $(m,1)$ (matrice qui admet une seule colonne).
- **Matrice carrée** : C'est une matrice dont le nombre de lignes est égal au nombre de colonnes $(m=n)$. Elle est dite matrice carrée d'ordre n ou tout simplement matrice d'ordre n.
$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & . & . & . & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & . & . & . & a_{2n} \\ & & & & & \\ & & & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & . & . & . & a_{nn} \end{pmatrix}.$$
Les éléments a_{ii}, sont appelés éléments **diagonaux** de A.
Les éléments a_{ij} pour $i \neq j$, sont appelés éléments **hors-diagonaux** de A.
L'ensemble des éléments diagonaux constitue la diagonale **principale** de A
- **Matrice identité.** On appelle matrice identité d'ordre $n \in \mathbb{N}^*$, la matrice carrée notée I_n telle que $I_n = (\delta_{ij})_{1\le i,j\le n}$, où δ_{ij} est le symbole de Kronecker $\delta_{ij} = 0$ si $i \neq j$ et $\delta_{ii} = 1, \forall i,j \in \{1,..,n\}$.
Par exemple la matrice identité d'ordre 3 s'écrit $I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.
- **Matrice diagonale.** C'est une matrice carrée telle que $a_{ij} = 0, \forall i \neq j$.
$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 & . & . & . & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 & . & . & . & 0 \\ & & & & & & \\ & & & & & & \\ 0 & 0 & . & . & . & . & a_{nn} \end{pmatrix}$$
On la note $A = \text{diag}(a_{ii}) = \text{diag}(a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn})$.
- **Matrice triangulaire supérieure.** C'est une matrice carrée vérifiant : $a_{ij} = 0$, pour $i > j$.
$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & . & . & . & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & . & . & . & a_{2n} \\ . & & & & & & . \\ . & & & & & & . \\ . & & & & & & . \\ 0 & . & . & . & . & . & a_{nn} \end{pmatrix}.$$
- **Matrice triangulaire inférieure.** C'est une matrice carrée vérifiant : $a_{ij} = 0$, pour $i < j$.
$$\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & . & . & . & . & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & & .. & . & 0 \\ . & & & & & & . \\ . & & & & & & . \\ . & & & & & & . \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & . & . & . & a_{nn} \end{pmatrix}.$$
- **Matrice nulle.** C'est la matrice vérifiant : $a_{ij} = 0, \forall i,j \in [|1,m|] \times [|1,n|]$. On la note $0_{\mathscr{M}_{m,n}(\mathbb{K})}$, ou simplement 0 (si aucune confusion n'est à craindre).
- **Transposée d'une matrice.** Étant donné une matrice $A \in \mathscr{M}_{m,n}(\mathbb{R})$. La transposée de la matrice A est la matrice notée ${}^tA$ de type (n,m), obtenue en échangeant (dans l'ordre) les lignes de A pour devenir les colonnes de ${}^tA$.

Exemple

$$A=\begin{pmatrix}3&1&0\\1&1&6\end{pmatrix}, {}^tA=\begin{pmatrix}3&1\\1&1\\0&6\end{pmatrix}.$$

Définition 3.1.3 Si $A=(a_{ij})_{1\le i\le m,1\le j\le n}$ et ${}^tA=(b_{ij})_{1\le i\le n,1\le j\le m}$, alors on a $b_{ij}=a_{ji},\forall i,j$.
- Une matrice carrée A est dite symétrique $\Leftrightarrow {}^t A=A$ (i.e. $a_{ij}=a_{ji},\forall i,j$).
- Une matrice carrée A est dite antisymétrique $\Leftrightarrow {}^t A=-A$ (i.e. $a_{ij}=-a_{ji},\forall i,j$).

3.2 Opérations sur les matrices

3.2.1 Addition

La somme de deux matrices A et B de même type (m,n) est la matrice C de même type (m,n) ayant pour éléments $c_{ij}=a_{ij}+b_{ij}$, pour tout $(i,j)\in[|1,m|]\times[|1,n|]$.

Exemple. Soient $A=\begin{pmatrix}2&1&3\\-1&0&1\end{pmatrix}$ et $B=\begin{pmatrix}1&-1&0\\0&1&-1\end{pmatrix}$. Alors $C=\begin{pmatrix}3&0&3\\-1&1&0\end{pmatrix}$.

Propriétés. L'addition des matrices satisfait les propriétés suivantes :
1. $A+B=B+A$,
2. $(A+B)+C=A+(B+C)=A+B+C$,
3. $A+0=0+A=A$, où 0 est la matrice nulle
4. $A+(-A)=(-A)+A=0$, où $-A=(-a_{ij})$.

3.2.2 Produit

- Soit $A=(a_{ij})$ une matrice de type (m,n) et soit $\lambda\in\mathbb{K}$. On définit la matrice λA de type (m,n) par :

$$\lambda A=(\lambda a_{ij})=\begin{pmatrix}\lambda a_{11}&\lambda a_{12}&\ldots&\lambda a_{1n}\\ \vdots&&&\vdots\\ \lambda a_{m1}&\lambda a_{m2}&\ldots&\lambda a_{mn}\end{pmatrix}$$

Exemple. Soient $A=\begin{pmatrix}2&1&3\\-1&0&1\end{pmatrix}$ et $\lambda=2$. Alors $\lambda A=\begin{pmatrix}4&2&6\\-2&0&2\end{pmatrix}$.

Propriétés.
- $\lambda(A+B)=\lambda A+\lambda B$,
- $(\lambda+\mu)A=\lambda A+\mu A$,
- $\lambda(\mu A)=(\lambda\mu)A$.

R $\mathscr{M}_{m,n}(\mathbb{K},+,.)$ est un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel.

- Soit $A=(a_{ij})$ une matrice (m,n) et $B=(b_{kl})$ une matrice (r,p). Le produit AB (dans cet ordre) n'est défini que si $n=r$ et $AB=C=(c_{il})$ de type (m,p) dont les éléments sont donnés par : $c_{il}=\sum_{j=1}^{n}a_{ij}b_{jl}$, pour tout $(i,l)\in[|1,m|]\times[|1,p|]$.

Exemple.

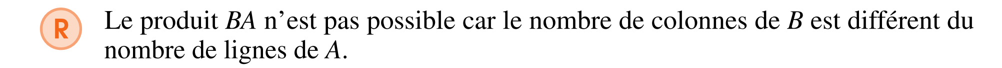
$$A=\begin{pmatrix}1&-1&0\\0&1&-1\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}1&2&0\\-1&1&1\\0&1&0\end{pmatrix}.$$

A est une matrice $(2,3)$ et B est une matrice $(3,3)$. D'où, le produit AB est possible et

$$AB = \begin{pmatrix} 1\times1+(-1)\times(-1)+0\times0 & 1\times2+(-1)\times1+0\times1 & 1\times0+(-1)\times1+0\times0 \\ 0\times1+1\times(-1)+(-1)\times0 & 0\times2+1\times1+(-1)\times1 & 0\times0+1\times1+(-1)\times0 \end{pmatrix}$$

$$AB = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

AB est une matrice du type $(2,3)$.



Le produit BA n'est pas possible car le nombre de colonnes de B est différent du nombre de lignes de A.

Propriétés. Le produit matriciel vérifie les propriétés suivantes :
- $\lambda(AB) = (\lambda A)B$,
- $A(BC) = (AB)C$,
- $(A+B)C = AC+BC$,
- $C(A+B) = CA+CB$.



- Le produit de matrices n'est pas commutatif
- $AB = 0$ n'implique pas que $A = 0$ ou $B = 0$.

Exemple.
- $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, alors $AB = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $BA = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Donc, $AB \neq BA$.
- $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$, alors $AB = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et pourtant $A \neq 0$ et $\mathscr{B} \neq 0$.

3.2.3 Opérations élémentaires sur une matrice

Soit A une matrice quelconque. On appelle opération élémentaire sur la matrice A l'une des transformations suivantes

1. Ajouter à une ligne (resp. à une colonne) de A une autre ligne (resp. colonne) multipliée par un scalaire : $L_j \longleftarrow L_j + \lambda L_i$ ou $C_j \longleftarrow C_j + \mu C_i, i \neq j$.
2. Multiplier une ligne (resp. une colonne) de A par un scalaire non nul : $L_j \longleftarrow \lambda L_j$ ou $C_j \longleftarrow \mu C_j$, où $\lambda, \mu \in \mathbb{K}^*$.
3. Permuter les lignes (resp. les colonnes) de A : $L_i \longleftrightarrow L_j$ ou $C_i \longleftrightarrow C_j$.

Exercice 3.1.
Soit I la matrice identité d'ordre 3

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

1. Permuter les lignes L_2 et L_3.
2. Remplacer les ligne L_2 par $-6L_2$.
3. Remplacer la ligne L_3 par $-4L_1 + L_3$.

Réponse.

1. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.
2. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -6 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.
3. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -4 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Définition 3.2.1 Une matrice A d'ordre n, est dite **inversible** (ou régulière) s'il existe une matrice B telle que $AB = BA = I_n$, où I_n est la matrice identité d'ordre n.
B est dite matrice **inverse** de A, et on la note A^{-1}.
Si la matrice inverse existe, elle est unique. Dans le cas contraire, on dit que A est non inversible ou que A est une matrice **singulière**.

3.2.4 Application pour déterminer l'inverse d'une matrice carrée inversible

Exercice 3.2.

Trouver l'inverse de la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & -1 & 3 \\ 4 & 1 & 8 \end{pmatrix}$.

Réponse.
Pour déterminer l'inverse A^{-1} d'une matrice inversible, on place la matrice unité du même ordre, à droite de A, puis on applique les mêmes opérations élémentaires sur A et I jusqu'à ce qu'on obtienne la matrice I à gauche de A.

$$(A|I) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & | & 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 3 & | & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 1 & 8 & | & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$L_2 \longleftarrow L_2 - 2L_1, L_3 \longleftarrow L_3 - 4L_1$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & | & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & | & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & | & -4 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$L_2 \longleftrightarrow L_3$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & | & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & | & -4 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & | & -2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$L_3 \longleftarrow L_3 + L_2$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & | & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & | & -4 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & | & -6 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$L_1 \longleftarrow L_1 + 2L_3, L_3 \longleftarrow -L_3$

$$(I|A^{-1}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & | & -11 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & | & -4 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & | & 6 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

Donc,

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -11 & 2 & 2 \\ -4 & 0 & 1 \\ 6 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

Pour calculer l'inverse de A, on peut aussi utiliser la méthode suivante dite, **méthode des coefficients indétermiés**. On cherche une matrice $B = (b_{ij})$ telle que $AB = I_n$.

Exemple. Soient $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ telle que $AB = I_2$.

$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$

On trouve que $A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$

Proposition 3.2.1 Soient A et B deux matrices inversibles de même ordre, alors
- AB est une matrice inversible et on : $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.
- ${}^tA$ est une matrice inversible et on a : $({}^tA)^{-1} = {}^t A^{-1}$.

3.2.5 Puissances d'une matrice

Puissances positives d'une matrice

Définition 3.2.2 Soit A une matrice d'ordre n. On définit les puissances $p-$ièmes $(p \in \mathbf{N})$ de A, par

$$A^0 = I_n(A \neq 0), \quad A^p = A.A\ldots A, \forall p \in \mathbf{N}^*.$$

Le produit est effectué p fois.
Ainsi : $A^2 = A.A, A^3 = A.A.A, \ldots$ etc

Propriétés. Soit A une matrice carrée, m et n deux entiers naturels non nuls, on a
1. $A^n.A^m = A^{n+m}$.
2. $(A^n)^m = A^{nm}$.

Formule des binômes de Newton

Soient A et B, deux matrices carrées de même ordre telles que $AB = BA$, alors :

$$(A+B)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k A^k B^{n-k}.$$

- **Matrice nilpotente.**
  Une matrice A d'ordre n est dite **nilpotente** s'il existe un entier p tel que $A^p = 0$.

La matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ est une matrice nilpotente $(A^2 = 0)$.

Puissances négatives d'une matrice.

Soit A une matrice inversible. On définit les puissances négatives de A de la manière suivante :

$$A^{-p} = (A^{-1})^p, \forall p \in \mathbf{N}.$$

3.3 Matrice d'une application linéaire

Soit E, F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimensions finies et $f \in \mathscr{L}(E,F)$. On suppose que $\dim E = n$ et $\dim F = p$. Soit $\mathscr{B} = \{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ une base de E et soit $\mathscr{C} = \{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_p\}$ une

base de F.
Chacun des vecteurs $f(e_1),\ f(e_2),\ldots,f(e_n)$ de F se décompose d'une manière unique dans la base $\mathscr{C}$. On écrit

$$\begin{cases} f(e_1) &= a_{11}\varepsilon_1 + a_{21}\varepsilon_2 + \ldots + a_{p1}\varepsilon_p \\ f(e_2) &= a_{12}\varepsilon_1 + a_{22}\varepsilon_2 + \ldots + a_{p2}\varepsilon_p \\ \vdots & \vdots \\ f(e_n) &= a_{1n}\varepsilon_1 + a_{2n}\varepsilon_2 + \ldots + a_{pn}\varepsilon_p, \end{cases}$$

avec $a_{1j}, a_{2j}, \ldots, a_{pj}$ sont les coordonnées du vecteur $f(e_j)$ dans la base $\mathscr{C}$. On appelle matrice associée à f relativement aux bases $\mathscr{B}$ et $\mathscr{C}$ et on note $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{C}}(f)$ la matrice de taille $p \times n$ dont la $j^{\text{ème}}$ colonne est constituée par les coordonnées du vecteur $f(e_j)$ vecteur de la base $\mathscr{B}$ dans la base $\mathscr{C}$

$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{C}}(f) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{p1} & a_{p2} & \ldots & a_{pn} \end{pmatrix}$$

Exemples

1. Soit l'application linéaire

$$\begin{array}{rccc} f: & \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^3 \\ & (x,y) & \mapsto & (x+3y,\ 3x,\ 2y). \end{array}$$

   Soit $\mathscr{B} = \{e_1, e_2\}$ la base canonique de $\mathbb{R}^2$ et $\mathscr{C} = \{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3\}$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$. Alors la matrice de f relativement aux bases $\mathscr{B}$ et $\mathscr{C}$ est

$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{C}}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

2. Soit $\mathscr{B} = \{1, X, X^2\}$ la base canonique de $\mathbb{R}_2[X]$. On considère l'endomorphisme de $\mathbb{R}_2[X]$ défini par

$$\begin{array}{rccc} f: & \mathbb{R}_2[X] & \to & \mathbb{R}_2[X] \\ & P & \mapsto & XP'. \end{array}$$

   La matrice de f relativement à la base $\mathscr{B}$ est

$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n, muni d'une base $\mathscr{B} = \{e_1, \ldots, e_n\}$ et F un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension p, muni d'une base $\mathscr{C} = \{\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_p\}$. Soient $f \in \mathscr{L}(E,F)$ et $A = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{C}}(f)$. Soit u un vecteur représenté dans E par $u = x_1e_1 + \ldots + x_ne_n$. Notons

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

le vecteur des coordonnées de u dans $\mathscr{B}$, et

$$Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_p \end{pmatrix}$$

le vecteur des coordonnées de $f(u)$ dans $\mathscr{C}$. Alors on a

$$Y = AX.$$

■ **Exemple 3.1** Soit $\begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ et soit f l'application linéaire associée à A relativement aux bases canoniques $\mathscr{B} = \{e_1, e_2, e_3\}$ de $\mathbb{R}^3$ et $\mathscr{C} = \{\varepsilon_1, \varepsilon_2\}$ de $\mathbb{R}^2$. Soit $u = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$.

Alors

$$f(u) = Au = A \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 9 \end{pmatrix}$$

■

3.3.1 Matrice de la composée

Soient E, F, G trois $\mathbb{K}$-espace vectoriels et $\mathscr{B}, \mathscr{B}', \mathscr{B}''$ leur base respectivement.

Théorème 3.3.1 $\forall f \in \mathscr{L}(E,F)$ et $\forall g \in \mathscr{L}(F,G)$, $g \circ f \in \mathscr{L}(E,F)$ et on a

$$M_{BB''}(g \circ f) = M_{B'B''}(g) M_{BB'}(f).$$

Exemple. Soient f et g les deux applications linéaires définies par

$$\begin{array}{llll} f: & \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^3 \\ & (x,y) & \mapsto & (x+y, x-y, 2x+4y), \end{array}$$

$$\begin{array}{llll} g: & \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^3 \\ & (x,y,z) & \mapsto & (x+y+3z, -x+y+2z, 2x+y+3z). \end{array}$$

Alors, relativement aux bases canoniques $\mathscr{B}_1$ de $\mathbb{R}^2$ et $\mathscr{B}_2$ de $\mathbb{R}^3$, on a

$$M_{\mathscr{B}_1,\mathscr{B}_2}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}.$$

et

$$M_{\mathscr{B}_2}(g) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ -1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

On montre facilement que

$$\begin{array}{lll} g \circ f : \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^3 \\ (x,y) & \mapsto & (8x+12y, 4x+6y, 9x+13y), \end{array}$$

D'où,

$$M_{\mathscr{B}_1,\mathscr{B}_2}(g \circ f) = \begin{pmatrix} 8 & 12 \\ 4 & 6 \\ 9 & 13 \end{pmatrix}.$$

$M_{\mathscr{B}_1,\mathscr{B}_2}(g \circ f) = M_{\mathscr{B}_2}(g) M_{\mathscr{B}_1,\mathscr{B}_2}(f)$.


Soient $f \in \mathscr{L}(E)$ et $\mathscr{B}$ une base de E. Alors

$$M_{\mathscr{B}}(f^2) = M_{\mathscr{B}}(f \circ f) = (M_{\mathscr{B}}(f))^2.$$

D'une manière générale, on a :

$$\forall n \in \mathbb{N}, M_{\mathscr{B}}(f^n) = M_{\mathscr{B}}(f \circ f \circ \cdots \circ f) = (M_{\mathscr{B}}(f))^n.$$

Conséquence(matrice d'un endomorphisme)
Si $dim(E) = dim(F) = n$, alors $f \in Isom(E,F) \iff M_{BB'}(f)$ est inversible et l'on a alors $M_{B'B}(f^{-1}) = (M_{BB'}(f))^{-1}$.
En effet, d'une part on a :

$$M_B(f^{-1} \circ f) = M_{B'B}(f^{-1})M_{BB'}(f) = M_B(Id_E)) = I_n,$$

D'autre part,

$$M_{B'}(f \circ f^{-1}) = M_{BB'}(f)M_{B'B}(f^{-1}) = M_{B'}(Id_F)) = I_n.$$

Donc, $M_{BB'}(f)$ est inversible et $(M_{BB'}(f))^{-1} = M_{B'B}(f^{-1})$.

3.4 Changement de bases

3.4.1 Matrice de passage

Définition 3.4.1 Soit E un espace vectoriel de dimension n et soient $\mathscr{B}_1 = \{e_1, \dots, e_n\}$ et $\mathscr{B}_2 = \left\{e_1^{'}, \dots, e_n^{'}\right\}$ deux bases de E.
La matrice de changement de bases ou matrice de passage de la base $\mathscr{B}_1$ à la base $\mathscr{B}_2$ notée $P_{\mathscr{B}_1\mathscr{B}_2}$, est la matrice de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ définie par

$$P_{\mathscr{B}_1\mathscr{B}_2} = M_{\mathscr{B}_2\mathscr{B}_1}(id_E).$$

De plus,

$$P_{\mathscr{B}_1\mathscr{B}_2} = (p_{ij})_{1 \le i,j \le n} \iff e_j^{'} = \sum_{i=1}^{n} p_{ij}e_i, \forall j \in [|1,n|].$$

Exemple $\mathscr{B}_1 = (e_1,e_2,e_3)$ est la base canonique de $\mathbb{R}^3$. Soit $\mathscr{B}_2 = (e'_1,e'_2,e'_3)$, où $e'_1 = (1,1,0), e'_2 = (1,0,1), e'_3 = (0,1,1)$. La matrice de passage de $\mathscr{B}_1$ à $\mathscr{B}_2$ est $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

Propriétés
- La matrice de passage $P_{\mathscr{B}_1\mathscr{B}_2}$ est la matrice dont la $j$ième colonne est constituée par les composantes de e'_j dans la base $\mathscr{B}_1$.
- $P_{\mathscr{B}_1\mathscr{B}_2}$ est une matrice inversible et $P^{-1}_{\mathscr{B}_1\mathscr{B}_2} = P_{\mathscr{B}_2\mathscr{B}_1}$

■ **Exemple 3.2** Soient $\mathscr{B} = (e_1,e_2)$ la base canonique de $\mathbb{R}^2$ et $\mathscr{B}' = (e'_1,e'_2)$ une famille de deux vecteurs de $\mathbb{R}^2$ tels que

$$e'_1 = 2e_1 + 3e_2, e'_2 = e_1 + e_2.$$

On peut vérifier facilement que $\mathscr{B}'$ est une base de $\mathbb{R}^2$. La matrice de passage de $\mathscr{B}$ à $\mathscr{B}'$ est

$$P_{\mathscr{B}\mathscr{B}'} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$$

La matrice de passage est une matrice inversible, donc $P^{-1}_{\mathscr{B}\mathscr{B}'}$ existe. De plus, pour déterminer $P^{-1}_{\mathscr{B}\mathscr{B}'}$ il suffit d'écrire les éléments de $\mathscr{B}$ en fonction des éléments de $\mathscr{B}'$. En effet, $(e'_1 = 2e_1+3e_2, e'_2 = e_1+e_2) \Longleftrightarrow (e_1 = -e'_1+3e'_2, e_2 = e'_1-2e'_2)$. Par conséquent

$$P_{\mathscr{B}'\mathscr{B}} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$$

■

3.4.2 Effet d'un changement de base pour une application linéaire

Théorème 3.4.1 Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel muni de deux bases $\mathscr{B}_1$ et $\mathscr{C}_1$, F un $\mathbb{K}$-espace vectoriel muni de deux bases $\mathscr{B}_2$ et $\mathscr{C}_2$ et $f \in \mathscr{L}(E,F)$. Alors les deux matrices $A_1 = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_1\mathscr{B}_2}(f)$ et $A_2 = \mathrm{Mat}_{\mathscr{C}_1\mathscr{C}_2}(f)$ vérifient

$$A_2 = Q^{-1}A_1P,$$

où $P = P_{\mathscr{B}_1\mathscr{C}_1}$ et $Q = P_{\mathscr{B}_2\mathscr{C}_2}$. Les matrices A_1 et A_2 sont dites matrices équivalentes.

Théorème 3.4.2 Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel muni de deux bases $\mathscr{B}$ et $\mathscr{C}$ et $f \in \mathscr{L}(E)$. Alors les deux matrices $A_1 = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f)$ et $A_2 = \mathrm{Mat}_{\mathscr{C}}(f)$ vérifient

$$A_2 = P^{-1}A_1P,$$

où $P = P_{\mathscr{B}\mathscr{C}}$. Les matrices A_1 et A_2 sont dites matrices semblables.

■ **Exemple 3.3** Soit $\mathscr{B} = \{e_1, e_2, e_3\}$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$ et soit $\mathscr{C} = \{u_1, u_2, u_3\}$ une base de $\mathbb{R}^3$ avec $u_1 = (2,0,-1)$, $u_2 = (-8,1,0)$ et $u_3 = (0,1,-5)$. Soit $f \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^3)$ où

$$\forall (x,y,z) \in \mathbb{R}^3,\ f(x,y,z) = (2x-2y, -x+3y+z, 2x+y+z).$$

La matrice de passage de la base $\mathscr{B}$ à la base $\mathscr{C}$ est donnée par

$$P = P_{\mathscr{B}\mathscr{C}} = \begin{pmatrix} 2 & -8 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & -5 \end{pmatrix}.$$

On vérifie facilement que

$$P^{-1} = P_{\mathscr{C}\mathscr{B}} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 5 & 40 & 8 \\ 1 & 10 & 2 \\ -1 & -8 & -2 \end{pmatrix}.$$

La matrice de f dans la base $\mathscr{B}$ est donnée par

$$A = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 \\ -1 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Donc, par la formule de changement de base, on trouve la matrice de f dans la base $\mathscr{C}$:

$$B = \mathrm{Mat}_{\mathscr{C}}(f) = P^{-1}AP = \begin{pmatrix} -33 & 120 & -31 \\ -9 & 32 & -9 \\ 6 & -21 & 7 \end{pmatrix}.$$

■

3.5 Rang d'une matrice

Définition 3.5.1 Soit $A \in M_{m,n}(\mathbb{K})$. Le rang de A est le rang dans $\mathbb{K}^n$, de ses n vecteurs colonnes. On le note $rg(A)$.

Propriétés.

- Si $f \in \mathscr{L}(\mathbb{K}^n, \mathbb{K}^m)$, alors le rang de f est égal au rang de sa matrice.
- $rg(A) \leq min(m,n)$.
- Une matrice A d'ordre n est inversible ssi $rg(A) = n$.
- Soit $A \in M_{m,n}(\mathbb{K})$. Alors, $rg(A) = rg({}^tA)$.
- $A, B \in M_{m,n}(\mathbb{K})$ sont équivalentes ssi $rg(A) = rg(B)$.

Exemple.

$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}, rg(A) = 2.$ $B = \begin{pmatrix} 3 & 5 & -1 \\ 2 & 3 & 0 \end{pmatrix}, rg(B) = 2.$

A et B sont équivalentes. En effet, si on pose $R = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, S = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, alors R et S sont inversibles. De plus, $B = RAS$.



4. Déterminant d'une matrice

Toutes les matrices considérées dans ce chapitre sont des matrices carrées.

4.1 Déterminant d'ordre 2

Considérons la matrice

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_2(\mathbb{K}).$$

On appelle déterminant de A et on note

$$\det(A) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix},$$

la valeur $\det(A) = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}$.

Exemples.

– Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$. Alors $\det(A) = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = -2$.

– Soit $B = \begin{pmatrix} \pi & a \\ 2 & x \end{pmatrix}$, avec $a, x \in \mathbb{R}$. Alors $\det(B) = \begin{vmatrix} \pi & a \\ 2 & x \end{vmatrix} = \pi x - 2a$.

4.2 Déterminant d'ordre 3

Considérons la matrice

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_3(\mathbb{K}).$$

On définit le déterminant de A comme suit (développement, par exemple, suivant la 1ère ligne) :

$$\det(A) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}.$$

Donc

$$\det(A) = a_{11}a_{22}a_{33} - a_{11}a_{32}a_{23} - a_{12}a_{21}a_{33} + a_{12}a_{31}a_{23} + a_{13}a_{32}a_{23} - a_{13}a_{31}a_{22}.$$

Définition 4.2.1
- Le mineur de a_{ij}, noté m_{ij}, est égal au déterminant de la matrice obtenue en enlevant la ligne i et la colonne j de A.
- On appelle cofacteur de a_{ij}, noté C_{ij}, l'élément $(-1)^{i+j}m_{ij}$.

R En développant suivant la 1ère ligne de A on obtient

$$\det(A) = a_{11}C_{11} + a_{12}C_{12} + a_{13}C_{13}.$$

Mais on peut aussi développer suivant n'importe quelle autre ligne ou colonne. Par exemple, suivant la 2ème colonne, on aura

$$\det(A) = a_{12}C_{12} + a_{22}C_{22} + a_{32}C_{32}.$$

4.3 Déterminant d'ordre n

On peut développer selon la j-ème colonne :

$$\det(A) = \sum_{i=1}^{n}(-1)^{i+j}a_{ij}m_{ij} = \sum_{i=1}^{n}a_{ij}C_{ij},$$

ou développer selon la i-ème ligne

$$\det(A) = \sum_{j=1}^{n}a_{ij}C_{ij}.$$

Proposition 4.3.1 Si $T = (t_{ij}),\ 1 \leq i,j \leq n$ est une matrice triangulaire, alors

$$\det(T) = t_{11}t_{22}\dots t_{nn}.$$

4.4 Propriétés

Propriété 1. Si tous les éléments d'une même ligne (resp. colonne) sont nuls alors le déterminant est nul.

Propriété 2. Si l'on permute deux lignes (resp. colonnes) alors le déterminant change de signe.

Propriété 3. Si l'on multiplie par $\alpha \in \mathbb{K}$ tous les éléments d'une ligne (resp.colonne) alors le déterminant est multiplié par α. Par exemple,

$$\begin{vmatrix} 12 & 4 & 4 \\ 3 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 4\begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 4\times 3\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix}.$$

En particulier,

$$\forall \alpha \in \mathbb{K}, \forall A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K}),\ \det(A) = \alpha^n \det(A).$$

Propriété 4. Si une ligne (resp. colonne) s'écrit comme une combinaison linéaire des autres lignes (resp. colonnes) alors le déterminant est nul. En particulier, si deux lignes (resp. colonnes) sont égales alors le déterminant est nul.

Propriété 5. Le déterminant ne change pas si l'on rajoute à une ligne (resp. colonne) une combinaison linéaire des autres lignes (resp. colonnes). Par exemple,

$$\begin{vmatrix} \sin^2(\alpha) & \sin^2(\beta) & \sin^2(\gamma) \\ \cos^2(\alpha) & \cos^2(\beta) & \cos^2(\gamma) \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \cos^2(\alpha) & \cos^2(\beta) & \cos^2(\gamma) \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Proposition 4.4.1 Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et soient A et B deux matrices carrées d'ordre n. Alors

- En général, $\det(A+B) \neq \det(A) + \det(B)$.
- A est inversible si et seulement si $\det(A) \neq 0$. Si A est inversible alors

$$\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)}.$$

- $\det(AB) = \det(BA)$.
- Si A et B sont semblables alors $\det(A) = \det(B)$.
- $\det(A^T) = \det(A)$.

4.5 Applications

4.5.1 Calcul de l'inverse d'une matrice

Définition 4.5.1 Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$. La matrice des cofacteurs (C_{ij}) des éléments (a_{ij}) de A, notée $\mathrm{Adj}(A)$ ou $\mathrm{Com}(A)$, est appelée matrice adjointe de A ou co-matrice de A.

$$\mathrm{Adj}(A) = \mathrm{Com}(A) = [C_{ij}] = [(-1)^{i+j} m_{ij}],\ 1 \leq i, j \leq n.$$

Théorème 4.5.1 Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$. Alors

- Si $\det(A) = 0$ alors A n'est pas inversible.
- Si $\det(A) \neq 0$ alors A est inversible, et on a

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} (\mathrm{Com}(A))^T.$$

4.5.2 Systèmes de Cramer

Soit (S) le système linéaire à n équations et n inconnues

$$(S) \left\{ \begin{array}{rcl} a_{11}x_1 + \ldots + a_{1n}x_n & = & b_1 \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1}x_1 + \ldots + a_{nn}x_n & = & b_n \end{array} \right.$$

Le système (S) s'écrit aussi sous la forme

$$AX = b,$$

où $A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$ est appelée la matrice associée au système (S), $b = (b_1, \dots, b_n)^T$ est appelé le second membre de (S), et $X = (x_1, \dots, x_n)^T$ est l'inconnue du système.

Proposition 4.5.2 Si A est inversible, alors la solution $\bar{X}$ de (S) est donnée par

$$\bar{X} = A^{-1}b.$$

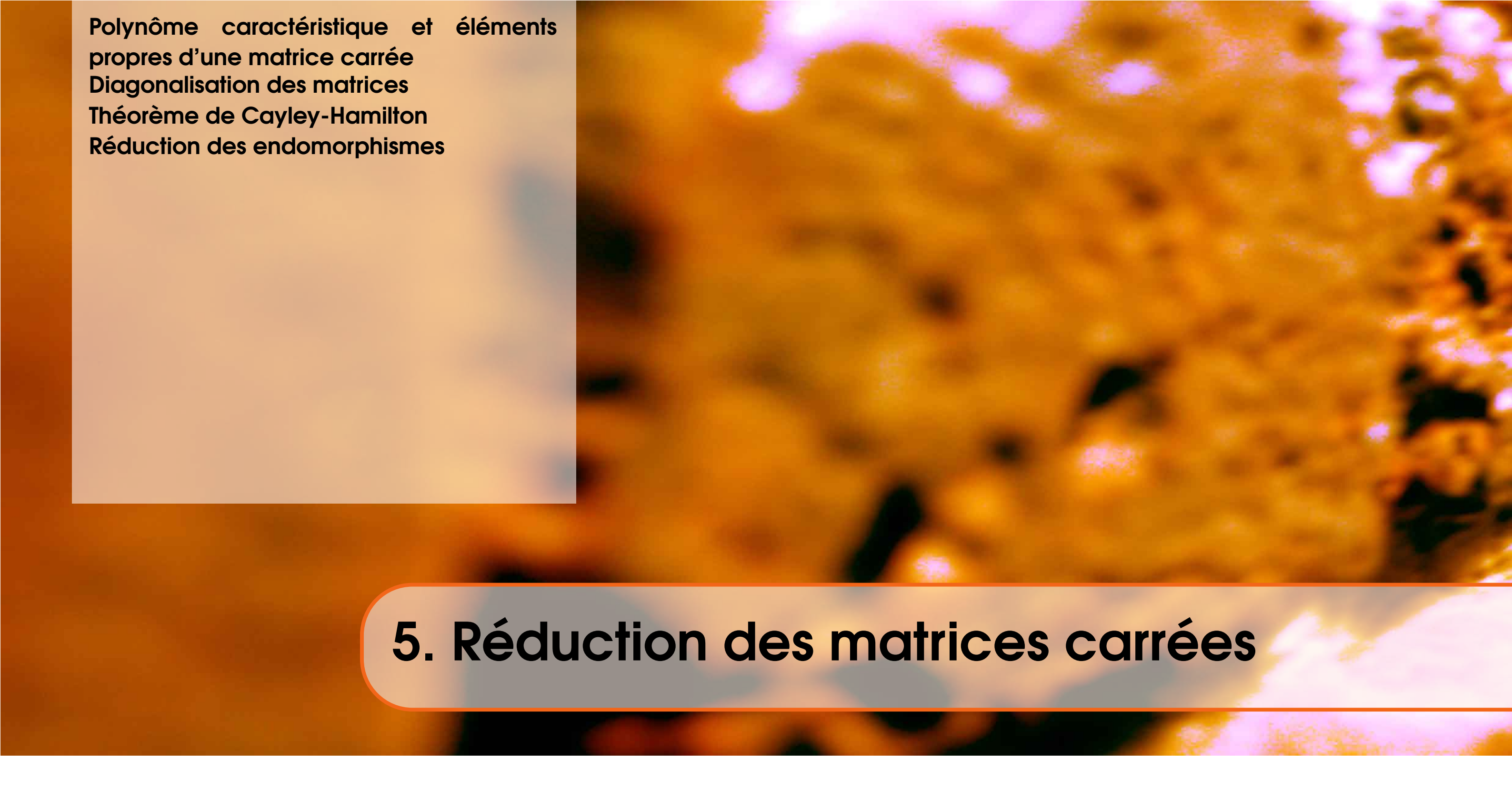
Lorsque la matrice A est inversible alors le système (S) est dit de Cramer. Un système de Cramer possède une et une seule solution.

Proposition 4.5.3 Notons $\Delta = \det(A)$ et

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_n & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}, \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & b_n & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}, \dots, \Delta_n = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1,n-1} & b_1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{n,n-1} & b_n \end{vmatrix}.$$

Si A est inversible alors les coordonnées $\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n$ de l'unique solution $\bar{X}$ de (S) sont données par

$$\bar{x}_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta}, \bar{x}_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta}, \dots, \bar{x}_n = \frac{\Delta_n}{\Delta}.$$



5. Réduction des matrices carrées

Dans tout ce qui suit, $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

5.1 Polynôme caractéristique et éléments propres d'une matrice carrée

Soit n un entier ≥ 1. On note $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ l'espace des matrices carrées d'ordre n à entrées dans $\mathbb{K}$. Soit $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On peut montrer par une récurrence facile sur n que

$$\det(A - xI_n) = \begin{vmatrix} a_{11} - x & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - x & \dots & a_{2n} \\ . & . & \dots & . \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots. & a_{nn} - x \end{vmatrix}$$

est un polynôme en x de degré n.

Définition 5.1.1 Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Le polynôme caractéristique $P_A(x)$ de A est le polynôme en x défini par

$$P_A(x) = \det(A - xI_n).$$

Le coefficient du terme de plus haut degré de $P_A(x)$ est égal à $(-1)^n$ et $P_A(0) = \det A$, donc

$$P_A(x) = (-1)^n x^n + \dots + \det(A).$$

■ **Exemple 5.1** Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$. On a

$$P_A(x) = \begin{vmatrix} 1 - x & 2 \\ -1 & 3 - x \end{vmatrix} = x^2 - 4x + 5.$$

■

■ **Exemple 5.2** Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. On a

$$\begin{aligned} P_A(x) &= \begin{vmatrix} 1-x & 1 & 1 \\ 1 & 1-x & 1 \\ 1 & 1 & 1-x \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3-x & 1 & 1 \\ 3-x & 1-x & 1 \\ 3-x & 1 & 1-x \end{vmatrix} \\ &= (3-x)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1-x & 1 \\ 1 & 1 & 1-x \end{vmatrix} = (3-x)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -x & 0 \\ 1 & 1 & 1-x \end{vmatrix} \\ &= -x(3-x)\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1-x \end{vmatrix} \\ &= x^2(3-x). \end{aligned}$$

■

Définition 5.1.2 Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$. Les racines du polynôme caractéristique $P_A(x)$ de A sont appelées les valeurs propres de A.

■ **Exemple 5.3** Les valeurs propres de la matrice A de l'exemple 5.2 précédent sont $\lambda_1 = 0$ (double) et $\lambda_2 = 3$ (simple). ■

Théorème 5.1.1 Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ et soit $\lambda \in \mathbb{K}$. Les conditions suivantes sont équivalentes :

1. $\lambda \in K$ est une valeur propre de A.
2. Ker $(A - \lambda I_n) \neq 0$.
3. Il existe $v \in \mathbb{K}^n$, $v \neq 0$, tel que $(A - \lambda I_n)v = 0$.

Démonstration. On a λ v.p. de $A \iff P_A(\lambda) = 0 \iff \det(A - \lambda I_n) = 0 \iff \mathrm{Ker}(A - \lambda I_n) \neq \{0\} \iff (\exists v \in K^n, v \neq 0$ et $(A - \lambda I_n)v = 0)$.

■

R La matrice A est inversible si et seulement si 0 n'est pas v.p. de A.

Définition 5.1.3 Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ et soit λ une v.p. de A. Le sous-espace $E_\lambda = \mathrm{Ker}(A - \lambda I_n)$ de $\mathbb{K}^n$ est appelé le s.e. propre associé à la v.p. λ.

■ **Exemple 5.4** Soit la matrice réelle

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

On a vu que les v.p. de A sont $\lambda_1 = 0$ et $\lambda_2 = 3$. Déterminons les s.e. propres de A :

i. Le s.e propre E_0

On a $v = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in E_0 \iff Av = 0 \iff \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff$

$$\begin{cases} x+y+z=0 \\ x+y+z=0 \\ x+y+z=0 \end{cases} \iff x+y+z=0 \iff z=-x-y \iff v=\begin{pmatrix} x \\ y \\ -x-y \end{pmatrix} \iff$$

$$v=x\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}+y\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}. \text{ Donc } E_0=\text{Vect}\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix},\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}\right\}$$

ii. Le s.e propre E_3

On a $v=\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}\in E_3 \iff (A-3I_3)v=0 \iff \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff$

$$\begin{cases} -2x+y+z=0 \\ x-2y+z=0 \\ x+y-2z=0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x+y-2z=0 \\ -2x+y+z=0 \\ x-2y+z=0 \end{cases} \iff \begin{cases} x+y-2z=0 \\ 3y-3z=0 \\ -3y+3z=0 \end{cases} \iff \begin{cases} x+y-2z=0 \\ 3y-3z=0 \end{cases}$$

$$\iff x=y=z \iff v=\begin{pmatrix} x \\ x \\ x \end{pmatrix} \iff v=x\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}. \text{ Donc } E_3=\text{Vect}\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}.$$

■

(R) On a $1\leq \dim(E_\lambda)\leq$ multiplicite de λ.

Théorème 5.1.2 Soient $M,N\in\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ deux matrices semblables. Alors M et N ont les mêmes polynômes caractéristiques, et donc les mêmes v.p. et les mêmes s.e. propres.

Démonstration. Soit $P\in\mathscr{M}_n(K)$ une matrice inversible telle que $M=PNP^{-1}$. On a $P_M(x)=\det(N-xI_n)=\det(PMP^{-1}-xI_n)=\det P(M-xI_n)P^{-1}=\det(M-xI_n)$.

■

5.2 Diagonalisation des matrices

Définition 5.2.1 On dit qu'un polynôme non constant $p(x)\in\mathbb{K}[x]$ est scindé dans $\mathbb{K}[x]$ si on peut l'écrire sous la forme

$$p(x)=a_n(x-x_1)^{\alpha_1}\ldots(x-x_k)^{\alpha_k},$$

où $x_1,\ldots,x_k$ sont les racines 2 à 2 distinctes de $p(x)$ et $\alpha_1,\ldots,\alpha_k$ sont leur multiplicités respectives.

■ **Exemple 5.5**

– Le polynôme $p(x)=x^3-2x^2+x$ est scindé dans $\mathbb{R}[x]$. En effet, on a

$$p(x)=x(x-1)^2.$$

– Tout polynôme $p(x)\in\mathbb{C}[x]$ est scindé.

■

Définition 5.2.2 Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On dit que M est diagonalisable si on peut trouver une matrice diagonale $D \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et une matrice inversible $P \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telles que

$$M = PDP^{-1}.$$

On dit alors que la matrice P diagonalise M.

Théorème 5.2.1 Soient $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $P \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ une matrice inversible. Si M est diagonalisable, alors $P^{-1}MP$ est diagonalisable.

Théorème 5.2.2 Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Alors les conditions suivantes sont équivalentes :

1. La matrice M est diagonalisable.
2. Il existe une base de $\mathbb{K}^n$ formée de vecteurs propres de M.

Théorème 5.2.3 Soit $M \in \mathcal{M}_n(K)$. Alors les conditions suivantes sont équivalentes :

1. La matrice M est diagonalisable.
2. Le polynôme caractéristique $p_M(x)$ de M est scindé et la dimension de chaque sous-espace propre E_λ de M est égale à la multiplicité de λ.

Pour diagonaliser une matrice, on procède de la façon suivante. On calcule le polynôme caractéristique de M, on détermine les v.p. et les s.e. propres de M. Si la condition 2 de ce théorème est satisfaite, voici comment on forme les matrices P et D :

1. La matrice D : c'est la matrice diagonale obtenue en mettant les valeurs propres λ_i de M sur la diagonale, chacune un nombre de fois égal à sa multiplicité, dans l'ordre $\lambda_1, \dots, \lambda_k$.
2. La matrice P : Après avoir construit la matrice D, on construit P en colonnes les composantes (dans la base canonique de $\mathbb{K}^n$) des vecteurs de bases des s.e. propres $E_{\lambda_1}, \dots, E_{\lambda_k}$ dans cet ordre.
   On ne calcule pas P^{-1} sauf pour les applications, par exemple pour le calcul de $M^n = PD^nP^{-1}$, où on a vraiment besoin de connaitre P^{-1}.

■ **Exemple 5.6** Revenons à la matrice réelle $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ de l'exemple 5.2. On a vu que $P_A(x) = x^2(3-x)$, qui est scindé dans $\mathbb{R}[x]$. Les v.p. de A sont $\lambda_1 = 0$ (double) $\lambda_2 = 3$ (simple). Les s.e. de A sont $E_0 = \text{Vect}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$ et $E_3 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$. On a $\dim(E_0) = 2$ et $\dim(E_3) = 1$, donc A est diagonalisable et on a $A = PDP^{-1}$, où $D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ et $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. ■

5.3 Théorème de Cayley-Hamilton

Soit $p(x) = a_n x^n + \ldots + a_0 \in \mathbb{K}[x]$. Pour toute matrice $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ on pose

$$p(A) = a_n A^n + \ldots + a_0 I_n.$$

Théorème 5.3.1 — Cayley-Hamilton. Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$, et $p_A(x)$ le polynôme caractéristique de A. Alors on a $p_A(A) = 0$.

■ **Exemple 5.7** Soit $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. On a $p_M(x) = x^2(3-x) = -x^3 + 3x^2$. Donc, d'après le théorème de Cayley-Hamilton, on a $p_M(M) = 0$, soit

$$-M^3 + 3M^2 = 0.$$

Il en résulte que $M^3 = 3M^2$. On endéduit que $M^n = 3^{n-1}M^2$ pour tout $n \geq 3$. Un calcul simple donne $M^2 = 3M$, d'où $M^n = 3^n M$. ■

5.4 Réduction des endomorphismes

Définition 5.4.1 Soit $f \in \mathscr{L}(E)$. On dit que $\lambda \in \mathbb{K}$ est une v.p. de f si $\mathrm{Ker}(f - \lambda 1_E) \neq \{0\}$, autrement dit si $f - \lambda 1_E$ n'est pas injectif.

Théorème 5.4.1 Soient $f \in \mathscr{L}(E)$ et $\mathscr{B}$ une base de E. Alors les conditions suivantes sont équivalentes :

1. $\lambda \in \mathbb{K}$ est une v.p. de f.
2. λ est une v.p. de la matrice M de f dans $\mathscr{B}$.

Démonstration. En effet, on a λ v.p. de $f \iff \mathrm{Ker}(f - \lambda 1_E) \neq \{0\} \iff \det(M - \lambda I_n) = 0 \iff p_M(\lambda) = 0 \iff \lambda$ v.p. de M

■

Définition 5.4.2 Un endomorphisme f de E est dit diagonalisable si sa matrice dans une base de E est diagonalisable.